Sucesiones

Concepto de sucesión

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dispuestos uno a continuación de otro.

$\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$

3, 6, 9,..., 3n

Los números $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots}$; se llaman **términos de la sucesión**.

El subíndice indica el **lugar que el término ocupa** en la **sucesión**.

El término general es $\mathbf{a_n}$ es una expresión matemática que nos permite determinar cualquier término de la **sucesión**.

Determinación de una sucesión:

Por el término general

$\mathbf{a_n = 2n-1}$

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

1, 3, 5, 7,..., 2n-1

No todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, **la sucesión de los números primos**:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

Por una ley de recurrencia

Los términos se obtienen operando con los anteriores.

Escribir una sucesión cuyo primer término es 2, sabiendo que cada término es el cuadrado del anterior.

2, 4, 16, ...

Sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Los dos primeros términos son unos y los demás se obtienen sumando los dos términos anteriores.

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por d.

8, 3, -2, -7, -12, ...

3 - 8 = -5

-2 - 3 = -5

-7 - (-2) = -5

-12 - (-7) = -5

d= -5.

Término general de una progresión aritmética

1 Si conocemos el 1^er^ término.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

8, 3, -2, -7, -12, ..

a_n= 8 + (n-1) (-5) = 8 -5n +5 = = **-5n + 13**

2 Si conocemos el valor que ocupa cualquier **otro término** de la progresión.

$a_n = a_k + (n - k) \cdot d$

$a_4 = -7$ y $d = -5$

$a_n = -7 + (n - 4) \cdot (-5) = -7 - 5n + 20 =$ **$-5n + 13$**

Interpolación de términos en una progresión aritmética

Interpolar medios diferenciales o aritméticos entre dos números, es construir una progresión aritmética que tenga por extremos los números dados.

Sean los **extremos a y b**, y el número de **medios** a interpolar **m**.

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

Interpolar tres medios aritméticos entre 8 y -12.

$$d = \frac{-12 - 8}{3 + 1} = \frac{-20}{4} = -5$$

8, **3, -2, -7** , -12.

Suma de términos equidistantes de una progresión aritmética

Sean **a_i y a_j dos términos equidistantes de los extremos**, se cumple que la **suma de términos equidistantes es igual a la suma de los extremos**.

$a_i + a_j = a_1 + a_n$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

$a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_1 + a_n$

8, 3, -2, -7, -12, ...

3 + (-7) = (-2) + (-2) = 8 + (-12)

-4 = -4 = -4

Suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Calcular la suma de los primeros 5 términos de la progresión : 8, 3, -2, -7, -12, ...

$$S_5 = \frac{(8-12)5}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada razón.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Si tenemos la sucesión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

6 / 3 = 2

12 / 6 = 2

24 / 12 = 2

48 / 24 = 2

r= 2.

Término general de una progresión geométrica

1 Si conocemos el 1^er^ término.

$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

3, 6, 12, 24, 48, ..

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n \cdot 2^{-1} = \mathbf{(3/2) \cdot 2^n}$

2 Si conocemos el valor que ocupa cualquier otro término de la progresión.

$\mathbf{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$

$a_4 = 24$, k=4 y r=2.

$a_n = a_4 \cdot r^{n-4}$

$a_n = 24 \cdot 2^{n-4} = (24/16) \cdot 2^n = (3/2) \cdot 2^n$

Interpolación de términos en una progresión geométrica

Interpolar medios geométricos o proporcionales entre dos números, es construir una progresión geométrica que tenga por extremos los números dados.

Sean los **extremos a y b**, y el número de **medios** a interpolar **m**.

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Interpolar tres medios geométricos entre 3 y 48.

$$r = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

3, **6, 12, 24** , 48.

Suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Calcular la suma de los primeros 5 términos de la progresión : 3, 6, 12, 24, 48, ...

$$S_5 = \frac{48 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 93$$

Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Calcular la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Producto de dos términos equidistantes

Sean a_i y a_j dos términos equidistantes de los extremos, se cumple que el producto de términos equidistantes es igual al producto de los extremos.

$$a_i \cdot a_j = a_1 \cdot a_n$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

$$a_3 \cdot a_{n-2} = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots = a_1 \cdot a_n$$

3, 6. 12, 24, 48, ...

48 · 3 = 6 · 24 = 12 · 12

144 = 144 =144

Producto de n términos equidistantes de una progresión geométrica

$$P = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Calcular el producto de los primeros 5 términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

$$P_5 = \sqrt{(3 \cdot 48)^5} = \sqrt{\left(3 \cdot 3 \cdot 2^4\right)^5} = \sqrt{3^{10} \cdot 2^{20}} = 3^5 \cdot 2^{10} = 248\,832$$

Término general de una sucesión

Cálculo del término general de una sucesión

1 Comprobar si la **sucesión** es una **progresión aritmética**.

8, 3, -2, -7, -12, ...

3 - 8= -5

-2 - 3 = -5

-7 - (-2) = -5

-12 - (-7) = -5

d= -5.

$a_n = 8 + (n - 1)(-5) = 8 - 5n + 5 =$ **$-5n + 13$**

2 Comprobar si la **sucesión** es una **progresión geométrica**.

3, 6, 12, 24, 48, ...

6 / 3 = 2

12 / 6 = 2

24 / 12 = 2

48 / 24 = 2

r= 2.

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

3 Comprobar si los términos de la **sucesión** son **cuadrados perfectos**.

4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

$2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \ldots$

Observamos que las bases están en **progresión aritmética**, siendo d = 1, y el exponente es constante.

$b_n = 2 + (n - 1) \cdot 1 = 2 + n - 1 = n+1$

Por lo que el **término general** es:

$a_n = (n + 1)^2$

También nos podemos encontrar con sucesiones cuyos términos son números próximos a cuadrados perfectos.

5, 10, 17, 26, 37, 50, ...

$2^2 +1$, $3^2 +1$, $4^2 +1$, $5^2 +1$, $6^2 +1$, $7^2 +1$, ...

Hallamos el **término general** como vimos en el ejemplo anterior y le sumamos 1.

$a_n = (n + 1)^2 + 1$

6, 11, 18, 27, 38, 51, ...

$2^2 + 2$, $3^2 + 2$, $4^2 + 1$, $5^2 + 2$, $6^2 + 2$, $7^2 + 2$, ...

$a_n = (n + 1)^2 - 1$

3, 8, 15, 24, 35, 48, ...

$2^2 - 1$, $3^2 - 1$, $4^2 - 1$, $5^2 - 1$, $6^2 - 1$, $7^2 - 1$, ...

$a_n = (n + 1)^2 - 1$

2, 7, 14, 23, 34, 47, ...

$2^2 - 2$, $3^2 - 2$, $4^2 - 2$, $5^2 - 2$, $6^2 - 2$, $7^2 - 2$, ...

$a_n = (n + 1)^2 - 2$

4 Si los términos de la sucesión **cambian consecutivamente de signo**.

Si los términos impares son negativos y los pares positivos: Multiplicamos a_n por $(-1)^n$.

-4, 9, -16, 25, -36, 49, ...

$a_n = (-1)^n (n + 1)^2$

Si los términos impares son positivos y los pares negativos: Multiplicamos a_n por $(-1)^{n-1}$.

4, -9, 16, -25, 36, -49, ...

$a_n = (-1)^{n-1} (n + 1)^2$

5 Si los términos de la sucesión **son fraccionarios** (no siendo una progresión).

Se calcula el término general del numerador y denominador por separado.

$a_n = b_n / c_n$

2/4, 5/9, 8/16, 11/25, 14/36,...

Tenemos dos sucesiones:

2, 5, 8, 11, 14, ...

4, 9, 16, 25, 36, ...

La primera es una progresión aritmética con d= 3, la segunda es una sucesión de cuadrados perfectos.

$a_n = (3n - 1)/(n + 1)^2$